3.5 Sous-espaces vectoriels de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ de dimension finie stables par les opérateurs de translation (151, 159, 221, 228) [6]

Dans l'étude des espaces vectoriels stables par des applications linéaires, on s'intéresse souvent aux espaces propres pour un endomorphisme. Lorsqu'une famille d'endomorphismes commutent entre eux, alors les espaces propres de l'un sont stables par tous les autres, ce qui permet de montrer que, s'ils sont diagonalisables ou trigonalisables, alors ils le sont dans une même base. Ici, on fait un crochet vers les espaces fonctionnels pour déterminer quels sont les sous-espaces de dimension finie de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ qui sont stables par les opérateurs de translation, qui sont des endomorphismes naturels pour l'étude de ces espaces fonctionnels. On obtient dans ce cas que ces sous-espaces sont les espaces de solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients constants !

Théorème 3.21. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ de dimension finie et stable par les opérateurs translation, définis pour $a \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rccc} \tau_a & : & \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \\ & & f & \longmapsto & \tau_a f : x \mapsto f(x-a). \end{array}$$

Alors E est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre n, c'est-à-dire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire et de degré n tel que :

$$E = \ker\left(P(D)\right)$$

où D est l'opérateur de dérivation :

$$\begin{array}{rccc} D & : & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \\ & & f & \longmapsto & f'. \end{array}$$

Démonstration. **Étape 1 : Montrons que $E \subset \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$:**
Puisque E est de dimension finie, on peut en extraire une base. Notons-la $(f_1,\dots,f_n)$. Montrons alors que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f_i \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, $\tau_{-a} f_i \in E$. Ainsi, il existe d'uniques $\lambda_{i,1}(a),\dots,\lambda_{i,n}(a) \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_i(x+a) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}(a) f_j(x).$$

En particulier, pour $x = 0$, on obtient :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad f_i(a) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}(a) f_j(0).$$

Ainsi, il suffit de montrer que les $\lambda_{i,j}$ sont des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ de a ! Pour le montrer, commençons déjà par intégrer pour rendre les choses $\mathscr{C}^1$. En notant, pour $i \in [\![1,n]\!]$:

$$F_i : x \longmapsto \int_0^x f_i(t)\mathrm{d}t,$$

on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_i(x+a) - F_i(a) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}(a) F_j(x).$$

On voudrait alors exprimer les $\lambda_{i,j}$ en fonctions des F_i. Cependant, il faut non-seulement éliminer la dépendance en x mais en plus "inverser le système". En fait, si on peut évaluer en certains points $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$, de sorte que, en notant :

$$A = (F_i(x_k))_{1\leq i,k\leq n}\,,$$

$$\Lambda(a) = (\lambda_{i,j}(a))_{1\leq i,j\leq n}$$

et :

$$B(a) = (F_i(x_k+a) - F_i(a))_{1\leq i,k\leq n}$$

on ait :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad B(a) = \Lambda(a)A$$

et donc, si on peut inverser A :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(a) = B(a)A^{-1}.$$

Ainsi, puisque les fonctions F_i sont de classe $\mathscr{C}^1$, on aurait alors que la matrice B est $\mathscr{C}^1$ et donc, que Λ est aussi $\mathscr{C}^1$. On veut donc montrer le lemme suivant :

Lemme 3.22 (Famille libre d'applications)**.** Soit $(f_1,\ldots,f_n) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})^n$ une famille d'applications. Alors cette famille est libre si et seulement s'il existe $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que la matrice :

$$(f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n} \in GL_n(\mathbb{C}).$$

Démonstration du lemme. $\Leftarrow$: Soient $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$ tels que la matrice :

$$A := (f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n} \in GL_n(\mathbb{C}).$$

Alors, si $\mu_1,\ldots,\mu_n \in \mathbb{C}$ sont tels que :

$$\sum_{i=1}^n \mu_i f_i \equiv 0,$$

alors, en particulier :

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{i=1}^n \mu_i f_i(x_j) = 0.$$

Le vecteur colonne :

$$M = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

vérifie donc :

$$A^T M = 0.$$

Donc, puisque A est inversible, $M = 0$. La famille $(f_1,\ldots,f_n)$ est donc libre.
$\Rightarrow$: Réciproquement, si la famille $(f_1,\ldots,f_n)$ est libre, en notant $F = \mathrm{Vect}(f_1,\ldots,f_n)$, et, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccc} \delta_x & : & F & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

on a :

$$\bigcap_{x\in\mathbb{R}} \ker(\delta_x) = \{0\}.$$

En passant à l'orthogonal au sens de la dualité :

$$\left(\bigcap_{x\in\mathbb{R}} \ker(\delta_x)\right)^\circ = F^*.$$

Or, on a :

$$\left(\bigcap_{x\in\mathbb{R}} \ker(\delta_x)\right)^\circ = \sum_{x\in\mathbb{R}} \ker(\delta_x)^\circ = \sum_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{Vect}(\delta_x) = \mathrm{Vect}\left(\{\delta_x, x\in\mathbb{R}\}\right).$$

Ainsi, étant donné que F^* est aussi de dimension finie, on peut en extraire une base. Il existe donc $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tel que $(\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n})$ soit une base de F^*. Ainsi, la matrice de passage de la base duale $(f_1^*, \ldots, f_n^*)$ à la base $(\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n})$. Calculons cette matrice. En notant $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ cette matrice, on a :

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad \delta_{x_j} = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i^*$$

de sorte que, en évaluant en les f_j :

$$\forall j,k \in [\![1,n]\!], \quad \delta_{x_j}(f_k) = f_k(x_j) = a_{k,j}.$$

On a donc bien :

$$A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} = (f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n} \in GL_n(\mathbb{C}).$$

□

Étant donné que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre, il en est de même pour la famille $(F_1, \ldots, F_n)$ (dériver la relation liant les F_i). Par le lemme, la formule :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \Lambda(a) = B(a)A^{-1}$$

est justifiée et donc, les fonctions f_i sont de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, et que donc en fait la matrice B est de classe $\mathscr{C}^2$ comme primitive d'une fonction $\mathscr{C}^1$, et donc Λ est de classe $\mathscr{C}^2$, et donc les f_i sont de classe $\mathscr{C}^2$, etc. On a donc que les f_i sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ ce qui veut dire :

$$E \subset \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}).$$

Étape 2 : E est stable par D : En dérivant par rapport à a la relation :

$$\forall x, a \in \mathbb{R}, \quad f_i(x+a) = \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j}(a) f_j(x),$$

et en évaluant en $a = 0$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_i'(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j}'(0) f_j(x).$$

Ainsi : $f_i' \in E$. E est donc stable par D !
Étape 3 : Conclusion : Soit P le polynôme minimal de $D_{|E}$. On a alors :

$$E = \ker(P(D))$$

et, si $d := \deg(P)$, on a par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire que les solutions de l'équation différentielle $P(D)(f) = 0$ forment un espace vectoriel de dimension d. Ainsi, $d = n$. Cela termine donc la preuve ! □

Remarque 3.5.1 (Dualité, formes linéaires et orthogonal)**.** *Dans cette démonstration, j'ai utilisé les faits suivants : si E est un espace vectoriel* ***de dimension finie****, alors :*

1. *Pour toute famille de sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in I}$ de E :*

$$\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)^\circ = \sum_{i\in I} E_i^\circ,$$

2. *Si $\ell \in E^*$, alors :*

$$\ker(\ell)^\circ = \mathrm{Vect}(\ell).$$

Démonstration. 1. Soit $(\ell_i)_{i\in I} \in (E^*)^{(I)}$ tel que :

$$\forall i \in I, \quad \ell_i \in (E_i)^\circ.$$

Alors :

$$\forall x \in \bigcap_{i\in I} E_i, \quad \sum_{i\in I} \underbrace{\ell_i(x)}_{=0 \text{ car } \ell_i \in (E_i)^\circ} = 0.$$

D'où :

$$\sum_{i\in I} E_i^\circ \subset \left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)^\circ.$$

Montrons également (vous verrez pourquoi ça sert), que :

$$\left(\sum_{i\in I} E_i\right)^\circ \subset \bigcap_{i\in I} E_i^\circ :$$

Soit $\ell \in \left(\sum_{i\in I} E_i\right)^\circ$. Soit $x_i \in E_i$. On a alors, en particulier :

$$x_i \in \sum_{i\in I} E_i.$$

D'où :

$$\ell(x_i) = 0.$$

Ainsi :

$$\forall i \in I, \quad \ell \in E_i^\circ.$$

D'où :

$$\left(\sum_{i\in I} E_i\right)^\circ \subset \bigcap_{i\in I} E_i^\circ.$$

Ainsi, en appliquant ces deux derniers résultats, on a :

$$\left(\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)^\circ\right)^\circ \subset \left(\sum_{i\in I} E_i^\circ\right)^\circ \subset \bigcap_{i\in I} (E_i^\circ)^\circ.$$

Or, en notant l'isomorphisme canonique :

$$\begin{array}{cccl} J & : & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & & x & \longmapsto & J(x) : \ell \mapsto \ell(x) \end{array}$$

on a, si F est un sev de E :

$$J^{-1}\left((F^\circ)^\circ\right) = {}^\circ(F^\circ) := \{x \in E \mid \forall \ell \in F^\circ, \quad \ell(x) = 0\} = F.$$

La dernière égalité vient du fait que, bien évidemment, $F \subset {}^\circ(F^\circ)$ et qu'il y a égalité des dimensions. En effet, un argument de passage au quotient montre que :

$$\dim F^\circ = \dim E - \dim F$$

et donc :

$$\dim {}^\circ(F^\circ) \underbrace{=}_{\text{via l'isomorphisme } J} \dim (F^\circ)^\circ = \dim E^* - \dim E + \dim F = \dim F.$$

Ainsi, les deux extrémités de cette chaîne d'inclusion sont égales à $J\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)$. La chaîne d'inclusions devient donc une chaîne d'égalités ! Ainsi :

$$\left(\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)^\circ\right)^\circ = \left(\sum_{i\in I} E_i^\circ\right)^\circ.$$

En passant donc à "l'orthogonal à gauche" dans cette égalité, on a donc :

$$\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)^\circ = \sum_{i\in I} E_i^\circ.$$

De même, on montre :

$$\left(\sum_{i\in I} E_i\right)^\circ = \bigcap_{i\in I} E_i^\circ.$$

2. On a clairement $\ell \in \ker(\ell)^\circ$ et donc $\mathrm{Vect}(\ell) \subset \ker(\ell)^\circ$. Par égalité des dimensions, on a alors égalité

$\square$

ATTENTION ! ! La dimension finie est CRUCIALE dans ce raisonnement ! ! *Sans ça, J n'est plus un isomorphisme, et la propriété cruciale qui fait que ça marche : ${}^\circ(F^\circ) = F$ n'est* ***PLUS VRAIE*** *en dimension infinie ! ! Si vous vous placez dans un espace vectoriel normé, alors on a quand même une version topologique : si on définit l'orthogonal topologique de F comme :*

$$F^\circ := \{\ell \in E' \mid \forall x \in F, \quad \ell(x) = 0\},$$

alors :

$${}^\circ(F^\circ) = \overline{F}$$

mais cela requiert ***Hahn-Banach analytique ! !***